1. Compressed sensingの基礎と将来展望

伊藤　聡志　宇都宮大学大学院工学研究科知能情報研究部門

圧縮センシング（compressed sensing：CS）がCandesとTaoらによって提案され，その革新的な理論がLustigによってMRIに応用[1]されてから，早や11年が経過しようとしている。

MRIの撮像を高速化する方法として，これまでにパラレルイメージング，マルチスライス法やEPIなどがあったが，いずれも信号受信系や勾配磁界など，ハードウエアの改変や性能向上を必要とするものであった。それに対し，CSは数理科学的な枠組みだけで撮像を高速化できる可能性を有している。そのため，CSがMRIに与えるインパクトはきわめて大きく，研究，開発に一大ブームを巻き起こした。CSの最大の応用分野は，MRIと言われることもあった。現在，CSはほとんどのベンダーの最新MRIで利用できるようになり，今後，臨床でのCS利用が大きく普及するものと思われる。しかし，いざCSを理解しようとすると，再構成処理には微分，最小値探索など，昨今の画像科学とも呼ばれる新たな信号処理理論が立ちふさがり，十分な理解が難しい。これまでにCSに関して多くの解説記事があるが，専門的知識を必要とするものもあったため，本稿では，なるべく平易な解説を行い，さらに将来展望について述べたい。

圧縮センシングの原理

xを系列長Nの画像信号，yを系列長Mの観測信号，観測行列をAとする時，$y = Ax$からxを復元することが主題である。この時，M＜Nであると，未知数に対して連立方程式の式の数が少ないので，解は一意に定まらない。しかし，求めるベクトルxの中にゼロを多く含んでいる場合（疎：スパース）は，式（1）のL1ノルム（$\|x\|_1$）を最小化することにより，高い確率でxを復元できる。なお，L1ノルムは，ベクトルxの各成分（x_1，x_2，$\cdots x_n$）の絶対値の総和である〔式（2）〕。

$$\min \|x\|_1 \ \text{s.t.}\ y = Ax \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (1)$$

$$\|x\|_1 = |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n| \quad \cdots \quad (2)$$

式（1）のs.t.は，subject to の略であり，$y = Ax$を満足しつつ，$\|x\|_1$の最小値を探す意味になる。血管像などを除いて，一般にMR画像はスパースではないので，スパース性を与えるスパース化関数 Ψ（sparsifying transform function）が必要である。また，観測信号には雑音 ε を含んでいるので，観測モデルを与える式は$y = Ax + \varepsilon$となる。これらを考慮すると，式（3），（4）の関係が得られる。

$$\mathrm{x} = \Psi x \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (3)$$

$$\mathrm{x} = \mathrm{argmin}_{\mathrm{x}} \|\mathrm{x}\|_1 \ \text{s.t.}\ \|y - A\Psi^{-1}\mathrm{x}\|_2 < \varepsilon \quad \cdots \quad (4)$$

式（4）のargminは，$\|\mathrm{x}\|_1$で，式（1）のminのように最小値を求めるのではなく，最小値を与えるxを探すという意味である。式（3），（4）を満足する解は，以下の最小化問題を解くことにより得られる。なお，λはラグランジュ未定乗数と呼ばれる定数であり，第1項のL2ノルム（$\|y - A\Psi^{-1}\mathrm{x}\|_2$）と第2項のL1ノルムの相対的な重みを調整する役割がある。

$$\min_{\mathrm{x}} \left\{ \frac{1}{2\lambda} \|y - A\Psi^{-1}\mathrm{x}\|_2^2 + \|\mathrm{x}\|_1 \right\} \cdots \quad (5)$$

式（5）を解く前に，スカラー量を変数とする式（6）の評価関数を解くことを考える。

$$\min_x \left\{ |x| + \frac{1}{2\lambda}(b - x)^2 \right\} \quad \cdots\cdots\cdots \quad (6)$$

ここで，bは実数である。式（6）は，xに関する絶対値があるので場合分けにより考える。まず，$x > 0$の場合を考える。

$$\min_x \left\{ x + \frac{1}{2\lambda}(b - x)^2 \right\} \quad \cdots\cdots\cdots \quad (7)$$

式（7）は式（8）のように変形することができる。

$$\min_x \left[\frac{1}{2\lambda}\{x - (b - \lambda)\}^2 + b - \frac{\lambda}{2} \right] (x > 0) \cdots \quad (8)$$

放物線の頂点である$b - \lambda$の値により，最小値はさらに場合分けされる。**図1 a**に示すように$b - \lambda > 0$の場合は，最小値を与えるx（x^*）は$x^* = b - \lambda$である。一方，$b - \lambda \leqq 0$の場合は，$x \geqq 0$の範囲

〈0913-8919/18/¥300/論文/JCOPY〉